中京大学経済学論叢
18号
2007年３月

# 愛知県豊田市水道水源保全事業の経済的評価Ⅱ*
## －最適化問題による森林環境税の分析－

中　山　恵　子
白　井　正　敏
山　田　光　男

本稿は、主として2006年６月に開催された生活経済学会全国大会における発表に依拠しており、2006年３月に発行された中京大学経済学論叢第17号に掲載した論文（中山・白井・山田（2006））のいわば続編にあたる。中山・白井・山田（2006）では、愛知県豊田市が市の水道料金の中で使用料１$m^3$あたり１円を水源である矢作川上流の森林保全にあてる「水道水源保全基金」として徴収していること、およびその基金が本来は2005年４月に豊田市との合併をはたした６町村の森林涵養に費やされる基金であったことに着目し、合併に伴う各町村の水道料金の変化、基金の在り方、今後の料金問題等を分析した。

そこで、本稿では、現在、大半の都道府県で森林環境税の類が導入、もしくは検討されていることを踏まえ、豊田市の基金方式と森林環境税の相違を最適化問題から考察することを目的とする。

## １．水道事業と森林涵養モデル

簡単化のため、無限期間生きる同一の所得と効用を持つ市民から成る社会を想定する。市民は、水道水とそれ以外の消費を変数とする効用関数を持つとしよう。代表的市民の効用関数を、

*　本稿の作成にあたり、愛知学院大学根津永二教授から有益な示唆をいただいたことをここに感謝する。なお、本稿の基盤となる研究は、平成17年度科学研究費補助金（課題番号1733047）によるものである。

$$U(c_t, W_t) \tag{1}$$

とする。ここで、$c_t$ は $t$ 期の消費量、$W_t$ は $t$ 期の水道使用量を表し、$U(\cdot)$ は準凹関数と仮定する。また、市民は各期を通じて一定の所得 $Y$ を得るとしよう。

水道は、水道供給事業によって供給され、水道供給費用は、固定費用 $K$ と水道供給量に依存する可変費用から構成されると考える。なお、限界費用は $m$ とする。一方、水源地区の森林ストック $x$ は、水道供給事業に外部効果を与えると仮定する。外部効果は、森林ストックの $n\,(\geqq 0)$ 倍の供給費用を削減する効果である。すなわち、水道供給費用関数を次のように想定する。

$$C(W_t, x_t) = K + mW_t - nx_t \tag{2}$$

森林ストックは一定の率 $\delta \in [0,1]$ で枯渇していくが、森林涵養支出 $I_t$ により $f(I_t)$ だけ増加するとしよう。また、関数 $f$ に関しては、$f'(I_t) > 0$、$f''(I_t) < 0$ と仮定する。このとき、森林ストックの純増加は、

$$\dot{x}_t = f(I_t) - \delta x_t \tag{3}$$

と表される。

社会的最適化問題は、代表的市民の生涯にわたる効用関数の現在価値を最大にするように、消費 $c_t$ と水道使用料 $W_t$、および森林涵養支出 $I_t$ に所得を配分することである。したがって、社会的最大化問題は次のように定式化される。

$$\max_{W,I} \int_0^\infty U(c_t, W_t)\, e^{-\rho t} dt$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} & Y = c_t + C(W_t, x_t) + I_t \\ & C(W_t, x_t) = K + mW_t - nx_t \\ & \dot{x}_t = f(I_t) - \delta x_t \\ & x_0 = \overline{x} \end{aligned}$$

なお、$\rho \in [0,1]$ は、社会的割引率、$x_0$ は初期（$t=0$）の森林ストック量である。

上記問題を解くために、現在価値ハミルトニアン $H$ を

$$H = U(Y - K - mW_t + nx_t - I_t, W_t) + \phi\{f(I_t) - \delta x_t\} \tag{4}$$

と定義する。ここで、$\phi$ は補助変数である。

最大化の1階の必要条件は、

$$H_W = 0 \tag{5}$$

$$H_I = 0 \tag{6}$$

$$\dot{\phi} = \rho\phi - H_x \tag{7}$$

2階の必要条件は

$$H_{WW} < 0 \tag{8}$$ [1]

$$H_{II} > 0 \tag{9}$$

と表され、これらは満たされていると仮定する。したがって、(5)～(7)式より、

$$-U_c m + U_W = 0 \tag{10}$$

$$-U_c + \phi f' = 0 \tag{11}$$

$$\dot{\phi} = \phi(\rho+\delta) - U_c n \tag{12}$$

を得る。さらに(10)式および(11)式は、

$$mU_c = U_W \tag{13}$$

$$U_c = \phi f' \tag{14}$$

と変形される。(14)式を(12)式に代入して整理すれば、

$$\dot{\phi} = \phi(\rho+\delta-nf') \tag{15}$$

また、定常状態（$\dot{\phi}=0$）を仮定すれば、(15) 式は、

$$nf' = \rho+\delta \tag{16}$$

となる。(16)式は、定常状態において、森林涵養支出の水道生産費用の限界的減少分で計った生産性が純社会的割引率に等しくなるよう涵養支出水準を決定するべきであることを意味している。

---

1　$H_{WW} < 0$ は、$m^2U_{cc}^2 - 2mU_{cW} + U_{WW} < 0$ と等価である。

## 2．最適経路の分析

最適経路は、以下の４本の方程式によって表される。

$$-U_c m + U_W = 0 \tag{10}$$

$$-U_c + \phi f' = 0 \tag{11}$$

$$\dot{x}_t = f(I_t) - \delta x_t \tag{3}$$

$$\dot{\phi} = \phi(\rho + \delta - nf') \tag{15}$$

(10) 式、(11)式より、最適な $W$、$I$ は $x$ および $\phi$ の関数として得られる。

$$W = W(x, \phi) \tag{17}$$

$$I = I(x, \phi) \tag{18}$$

(17)式、(18)式をそれぞれ全微分すれば、

$$(m^2 U_{cc} - 2mU_{cW} + U_{WW})dW + (mU_{cc} - U_{Wc})dI = n(mU_{cc} - U_{Wc})dx \tag{19}$$

$$(mU_{cc} - U_{cW})dW + (U_{cc} + \phi f'')dI = nU_{cc}dx - f'd\phi \tag{20}$$

これら２式を行列表示すれば、

$$\begin{pmatrix} m^2 U_{cc} - 2mU_{cW} + U_{WW} & mU_{cc} - U_{cW} \\ mU_{cc} - U_{cW} & U_{cc} + \phi f'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW \\ dI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n(mU_{cc} - U_{cW})dx \\ nU_{cc}dx - f'd\phi \end{pmatrix} \tag{21}$$

ゆえに、(21) 式から以下の２式が求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x} &= \frac{\begin{vmatrix} m^2 U_{cc} - 2mU_{cW} + U_{WW} & n(mU_{cc} - U_{cW}) \\ mU_{cc} - U_{cW} & nU_{cc} \end{vmatrix}}{|A|} \\ &= \frac{n}{|A|}(U_{cc}U_{WW} - U_{cW}^2) \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \phi} &= \frac{\begin{vmatrix} m^2 U_{cc} - 2mU_{cW} + U_{WW} & 0 \\ mU_{cc} - U_{cW} & f' \end{vmatrix}}{|A|} \\ &= \frac{1}{|A|}\left(f'(m^2 U_{cc} - 2mU_{cW} + U_{WW})\right) \end{aligned} \tag{23}$$

ただし、$|A|=\begin{vmatrix} m^2U_{cc}-2mU_{cW}+U_{WW} & mU_{cc}-U_{cW} \\ mU_{cc}-U_{cW} & U_{cc}+\phi f'' \end{vmatrix}$ (24)

ここで、$\mathrm{sgn}|A|>0$ であることを考慮すれば、(23)式から $\mathrm{sgn}\dfrac{\partial I}{\partial \phi}<0$。他方、$\mathrm{sgn}\dfrac{\partial I}{\partial x}$ は確定できない。そこで、$U_{cW}$ が極めて小さい（$U_{cW}=\dfrac{dU_c}{dW}\fallingdotseq 0$）、換言すれば、水道使用料の変化が水道を除いた消費全般の限界効用にさして影響を与えないと仮定すれば、(24)式から $\mathrm{sgn}\dfrac{\partial I}{\partial x}>0$ と考えられる。

次に定常状態を考察しよう。定常状態とは $\dot{\phi}=0$、$\dot{x}=0$ を満足する状態である。したがって、前者は(15)式により、

$$\rho+\delta-nf'\left(I(x,\phi)\right)=0 \tag{25}$$

後者は( 3 )式から、

$$f\left(I(x,\phi)\right)-\delta x=0 \tag{26}$$

と表される。(25)式と(26)式を全微分すれば、

$$\frac{\partial I}{\partial x}dx+\frac{\partial I}{\partial \phi}d\phi=0 \qquad \text{および} \qquad \left(f'\frac{\partial I}{\partial x}-\delta\right)dx+f'\frac{\partial I}{\partial \phi}d\phi=0$$

したがって、これら 2 式から、

$$\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{\dot{\phi}=0}=-\frac{\partial I/\partial x}{\partial I/\partial \phi} \tag{27}$$

$$\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{\dot{x}=0}=-\frac{f'\partial I/\partial x-\delta}{f'I/\partial \phi} \tag{28}$$

を得る。

$\mathrm{sgn}\dfrac{\partial I}{\partial \phi}<0$ および $\mathrm{sgn}\dfrac{\partial I}{\partial x}>0$ を利用すれば、(27) 式の $\mathrm{sgn}\left.\dfrac{d\phi}{dx}\right|_{\dot{\phi}=0}>0$ を得るが、(28)式の $\mathrm{sgn}\left.\dfrac{d\phi}{dx}\right|_{\dot{x}=0}$ は不確定である。したがって、この符号の正負および傾きに応じて、

以下の３つのケース、

| | $\dot{\phi}=0$ | $\dot{x}=0$ | |
|---|---|---|---|
| ケース１ | 右上がり | 右上がり | （$\dot{\phi}=0$）の傾き＜（$\dot{x}=0$）の傾き　（図１） |
| ケース２ | 右上がり | 右上がり | （$\dot{\phi}=0$）の傾き＞（$\dot{x}=0$）の傾き　（図２） |
| ケース３ | 右上がり | 右下がり | （図３） |

に分類され、図よりケース２およびケース３では定常解が存在し、それらが鞍点であることが示される。

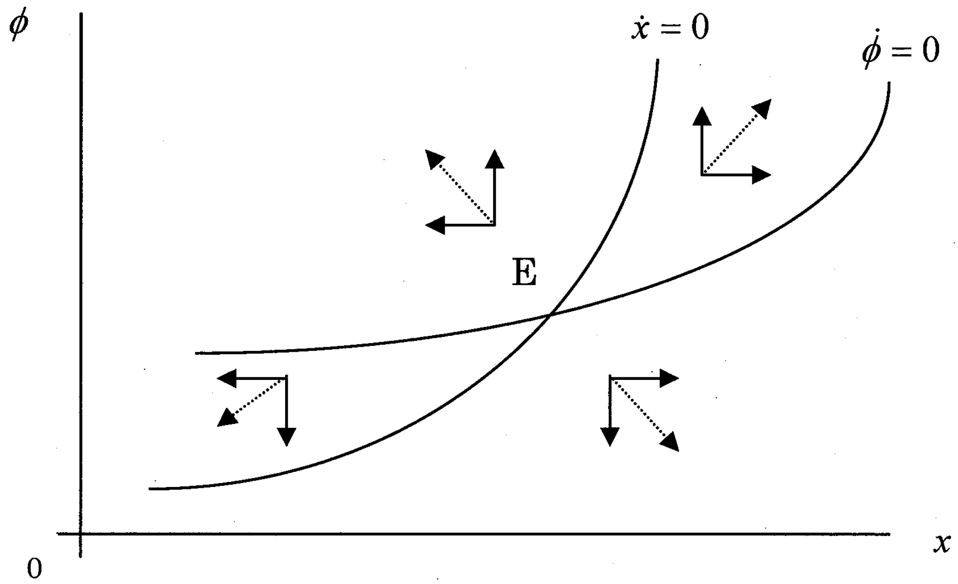



**図１　ケース１**

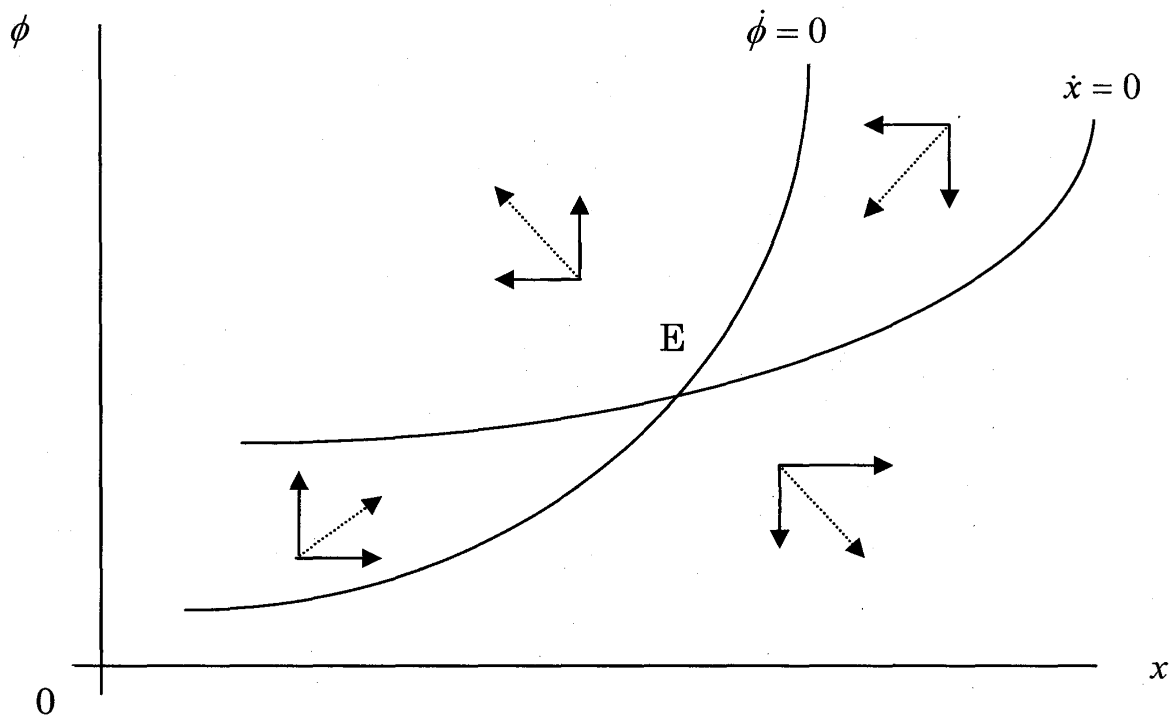



図２　ケース２

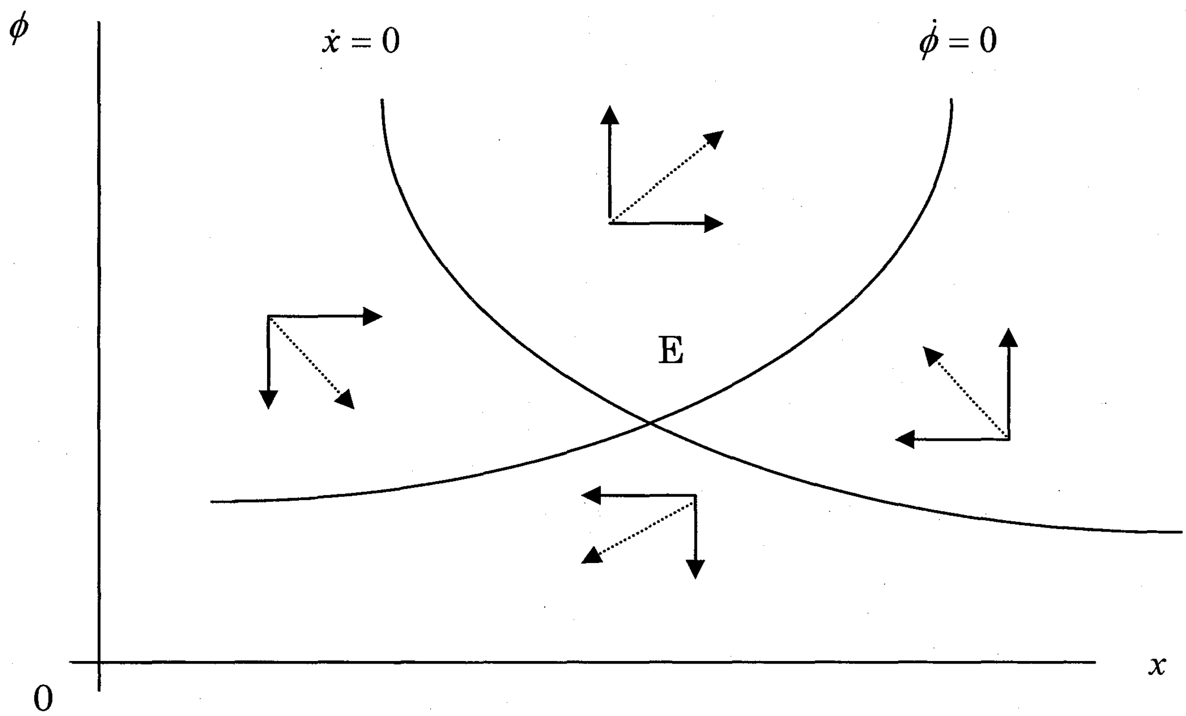



図３　ケース３

## 3. 一括税方式

前節では、社会的最適化を考察するために個人の行動を考慮しなかったが、以下では、消費と水道水の使用は個人の最適化行動から決定されると想定する。市当局は毎期、水道料金に加え、一括税 $T_t$ を徴収し森林涵養のために支出するとしよう。水道料金は、固定費用部分を基本料金、可変費用を従量料金として徴収すると仮定すれば、この料金設定は費用関数から、基本料金 $K-nx_t$、従量料金 1 $m^3$あたり $m$ を意味する。

この場合、代表的市民の行動は

$$\max_{c_t, W_t} U(c_t, W_t)$$

$$\text{s.t.} \quad Y = c_t + mW_t + K - nx_t + T_t \tag{29}$$

と定式化される。その一階の条件は、

$$U_c = \lambda \tag{30}$$

$$U_W = m\lambda \tag{31}$$

$$Y = c_t + mW_t + K - nx_t + T_t \tag{32}$$

である。ここで、$\lambda$ は所得制約に付くラグランジュ乗数である。

これより、個人の水道料金と一括税に応ずる消費と水道使用量の各需要関数が求められる。

$$c_t = c(m, Y-K+nx_t-T_t) \tag{33}$$

$$W_t = W(m, Y-K+nx_t-T_t) \tag{34}$$

市当局は、市民の需要関数を所与として、社会的厚生関数を最大にするように、一括税を決定する。したがって、社会的最大化問題は、次式のように定式化される。

$$\max_T \int_0^\infty U\left(c(m, Y-K+nx_t), W(m, Y-K+nx_t)\right) e^{-\rho t} dt$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{x}_t = f(T_t) - \delta x_t$$

$$x_0 = \bar{x}$$

現在価値ハミルトニアンを $H'$ とすれば、

$$H' = U\left(c(m, Y-K+nx_t-T_t), W(m, Y-K+nx_t-T_t)\right) + \xi\{f(T_t) - \delta x_t\} \tag{35}$$

なお、$\xi$ は補助変数である。

この場合の最適解は、次の条件を満足する。

$$-U_c\left(\frac{\partial c}{\partial Y}\right)-U_W\left(\frac{\partial W}{\partial Y}\right)+\xi f'=0 \tag{36}$$

$$\dot{\xi}=\rho\xi+U_c\left(\frac{\partial c}{\partial Y}n\right)+U_W\left(\frac{\partial W}{\partial Y}n\right)-\delta\xi \tag{37}$$

(36)式および(37)式は、消費者の主体的均衡条件式から、

$$\lambda+\xi f'=0 \tag{38}$$

$$\dot{\xi}=\rho\xi+n\lambda+\delta\xi \tag{39}$$

さらに(38)式より、

$$\lambda=-\xi f' \tag{40}$$

これを、(39)式に代入して整理すれば、

$$\dot{\xi}=\xi(\rho+\delta-nf') \tag{41}$$

(41)式は、最適条件を表す(16)式に一致する。したがって、水道水の使用を個人に任せたとしても、一括税による森林補助方式は最適解を達成する。

## 4．豊田市方式

豊田市方式は、1 m$^3$につき1円(税込み1.05円)を森林涵養基金として水道料金に上乗せして徴収する制度である。

水道料金は限界費用 $m$ に等しいとし、課徴金を1 m$^3$あたり $s$ 円とすれば、市民が支払う水道料金支出は$\{(m+s)W_t+K-nx_t\}$円となり、森林涵養基金は、毎期 $sW_t$ 円となる。

代表的市民は、市当局が決定する水道料金と課徴金を所与として、効用を最大にするように消費と水道使用量を決定する。したがって、

$$\max_{c_t,W_t} U(c_t, W_t)$$

$$\text{s.t.} \qquad Y = c_t + (m+s)W_t + K - nx_t$$

と表される。また、その一階条件は、

$$U_c = \eta \tag{42}$$

$$U_W = (m+s)\eta \tag{43}$$

$$Y = c_t + (m+s)W_t + K - nx_t \tag{44}$$

これらより、代表的市民の消費と水道使用量の需要関数はそれぞれ、

$$c_t = c(m+s, Y-K+nx_t) \tag{45}$$

$$W_t = W(m+s, Y-K+nx_t) \tag{46}$$

と求められる。

この場合は、市当局は代表的市民の需要関数を所与として、社会的厚生関数を最大化するように課徴金を決定する。そのときの最適化問題は、以下に示される。

$$\max_s \int_0^\infty U\big(c(m+s, Y-K+nx_t), W(m+s, Y-K+nx_t)\big)e^{-\rho t}dt$$

$$\text{s.t.} \qquad \dot{x}_t = f(sW_t) - \delta x_t$$

$$x_0 = \bar{x}$$

さらに、現在価値ハミルトニアン $H''$ は、

$$H'' = U\big(c(m+s, Y-K+nx_t), W(m+s, Y-K+nx_t)\big) + \phi\{f(sW_t) - \delta x_t\} \tag{47}$$

と定義される。ただし、$\phi$ は補助変数である。

ここで必要条件は、

$$U_c\frac{\partial c}{\partial s} + U_W\frac{\partial W}{\partial s} + \phi f'\left(W_t + \frac{\partial W}{\partial s}s\right) = 0 \tag{48}$$

$$\dot{\phi} = \rho\phi - U_c\frac{\partial c}{\partial Y}n - U_W\frac{\partial W}{\partial Y}n + \phi\delta \tag{49}$$

である。(48)式、(49)式は、個人の均衡条件式(10)～(12)式より、

$$\eta\frac{\partial c}{\partial s}+\eta(m+s)\frac{\partial W}{\partial s}+\psi f'\left(W_t+\frac{\partial W}{\partial s}s\right)=0 \tag{50}$$

$$\dot{\psi}=\rho\psi-\eta\frac{\partial c}{\partial Y}n-\eta(m+s)\frac{\partial W}{\partial Y}n+\psi\delta \tag{51}$$

(50)式は、

$$-\eta W_t+\psi f'\left(W_t+\frac{\partial W}{\partial s}s\right)=0 \tag{52}$$

(51)式は、

$$\dot{\psi}=\rho\psi-\eta n\left\{\frac{\partial c}{\partial Y}+(m+s)\frac{\partial W}{\partial Y}\right\}+\psi\delta$$

すなわち、

$$\dot{\psi}=(\rho+\delta)\psi-\eta n \tag{53}$$

また、(52)式を変形すると、

$$\eta=\psi f'(1+\varepsilon_t) \tag{54}$$

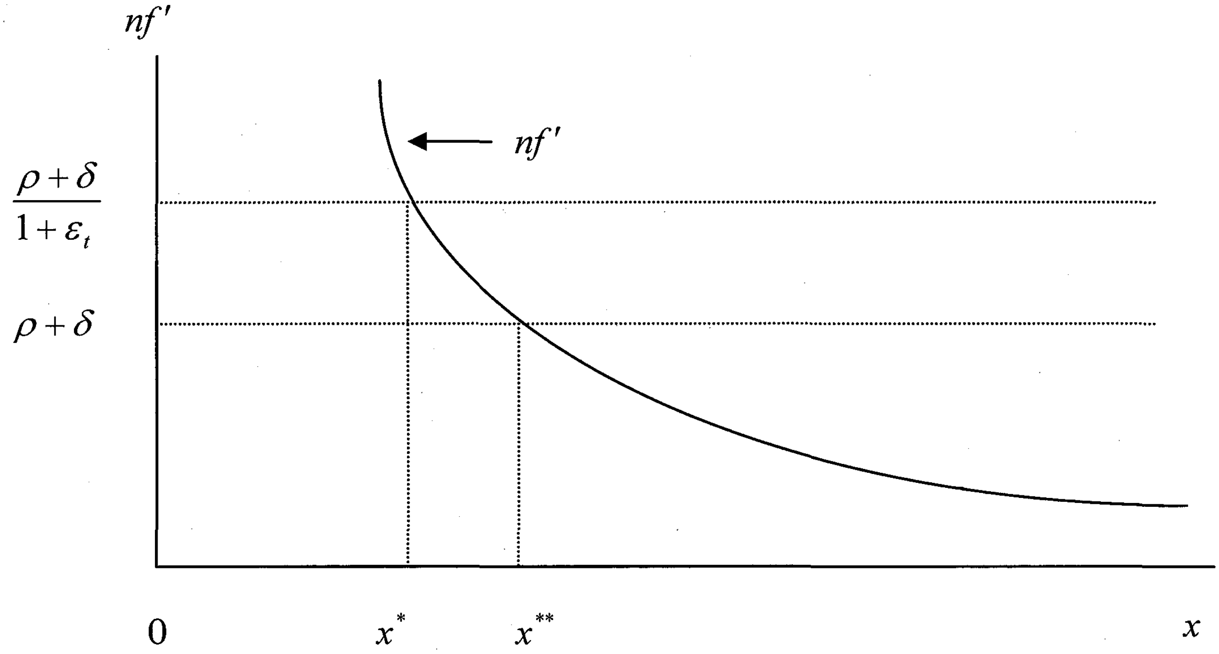
となる。ここで、$\varepsilon_t=\frac{s}{W_t}\frac{\partial W}{\partial s}=\frac{s}{W_t}\frac{\partial W}{\partial(m+s)}$ と定義すれば、$\varepsilon_t$ は $t$ 期の水道需要の価格弾力性と解釈される。(54)式を、(53)式に代入して整理すれば、

$$\dot{\psi}=\psi\{\rho+\delta-nf'(1+\epsilon_t)\} \tag{55}$$

を得る。(55)式は、最適条件式の(16)式と $\varepsilon_t$ だけ異なるから、$\varepsilon_t=0$、すなわち水道需要の価格弾力性が0であるときには、最適条件式と一致する。一般的には、水道需要の価格弾力性は極めて小さい[2]ものの0ではないから、本節で想定した豊田方式は最適解を達成しない。

定常状態に限定すれば、(55)式は

2　浦上(2000)によれば、日本全体の平均的家庭における水道需要の価格弾力性は−0.05〜−0.41、他方、水道需要の所得弾力性は、0.10〜0.28とされる。たとえば、OECD(1999)、北村(2003)、外務省(2004)においても、同様の傾向が見られ、料金、所得の何れも水道消費への影響が小さいといえる。




$x^*$：豊田市方式の森林ストックの定常水準　$x^{**}$：最適森林ストックの定常水準

**図４　森林ストックの定常水準**

$$nf'(1+\varepsilon_t)=\rho+\delta \tag{56}$$

または、

$$nf'=\frac{\rho+\delta}{1+\varepsilon_t} \tag{57}$$

となる。図４に描かれるように、(56)式を満たす森林涵養基金水準は、(16)式を満たす水準より低い。したがって、長期森林涵養水準は、豊田市方式では過少となることが示される。歪みの程度は水道需要の価格弾力性に依存するが、一般的に水道需要の価格弾力性は極めて低い値である。ゆえに、豊田市方式においても、最適解はほぼ達成されるといえよう。

以上から、一括税方式の採用がより望ましいことがわかった。しかし、一般的に税の導入は人々の同意を得がたいという事実がその導入を困難にしている。実際、愛知県でも森林環境税の類は検討には至ったものの、具体的な導入案はなんら提示されていな

3　たとえば、中山（2003）、高田・茂野（1998）参照。
4　モデルに関しては、政策科学研究所環境経済学研究会訳（2005）、時政（2001）参照。

い。本論文では、一括税方式と豊田市方式に着眼し、分析を行ったが、実証的な分析は全くなされていない。従来の水道に関する経済学的分析には、効率性や規制を扱った研究が多く[3]、また、森林に関しては水源としてというよりは寧ろ最大持続産出の達成を意図した研究[4]が主流であった。したがって、森林涵養のみならず、治水、灌漑や森林事業の便益も着見込んだモデルの構築および実証分析が今後の課題といえよう。

## 参考文献


外務省（2004)、「外務省調査月報」(2004年 No.3)

政策科学研究所環境経済学研究会訳 (2005)、『環境経済学　理論と実践』(Hanley, N., J. F. Shogren and B.White(1997), *Environmental Economics in Theory and Practice*(Macmillan Press))（勁草書房）

北村行伸（2003)、「物価と消費の長期変動」(『季刊家計経済研究』2003年第57号)

中山惠子・白井正敏・山田光男 (2006)、「愛知県豊田市水道水源保全事業の経済的評価」(中京大学経済学論叢第17号)

中山徳良（2003)、『日本の水道事業の効率性分析』(多賀出版)

OECD (1999)、*Household Water Pricing in OECD Countries*

高田しのぶ・茂野隆一（1998)、「水道事業における規模の経済性と密度の経済性」(『公益事業研究』1998年第50巻第１号)

時政勗（2001)、『環境・資源経済学』(中央経済社)

浦上拓也 (2000)、「日本の家庭用水需要関数の推定　－集計データを用いて－」(『公益事業研究』2000年第52巻第２号)